A002 - ESAME DI MATURITÀ

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:
LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

«Nella misura in cui i teoremi della Matematica si riferiscono alla realtà, non sono certi, e nella misura in cui essi sono certi, non si riferiscono alla realtà»

Albert Einstein, *Geometrie und Erfahrung*, conferenza del 1921

PROBLEMA 1

In tabella sono indicati i rilevamenti, fatti a inizio anno a partire dal 2016, del livello dell'acqua del lago di Bracciano. Nel 2016 e nel 2017 il lago, oggetto di prelievi, era utilizzato come riserva idrica di emergenza per i comuni limitrofi e per l'approvvigionamento di Roma. Nel 2017, in considerazione dell'impatto ambientale e del notevole abbassamento del livello idrometrico rispetto a quello considerato ottimale, si è deciso di interrompere i prelievi, sospensione tuttora in atto.

Anno (al 1° gennaio)	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026
Differenza del livello rispetto allo zero idrometrico (in dm)	- 6	- 16	- 20	- 18	- 16	- 14	- 12	- 10	- 10	- 10	- 10

Si scelga un sistema di riferimento in cui l'unità, sull'asse delle ascisse, corrisponda all'arco temporale di un anno e il 1° gennaio 2016 allo zero, mentre sull'asse delle ordinate l'unità corrisponda a una differenza di 1 dm rispetto allo zero idrometrico (livello ottimale).

Con buona approssimazione, dall'inizio del 2016 fino all'inizio del 2019, si può descrivere l'andamento del livello delle acque con il modello polinomiale

$$y = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 - 20, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Nel periodo tra l'inizio del 2019 e l'inizio del 2023 si assume una crescita oscillante, approssimata con un modello del tipo $y = mx - 24 + sen^2(\pi x)$, con $m \in \mathbb{R}$. Poi, fino all'inizio del 2026, l'andamento può essere approssimato con un modello del tipo $y = 2\cos(2\pi x) + k$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Utilizzando i dati riportati in tabella e le informazioni fornite, definire il modello matematico $f(x)$ che esprime l'andamento del livello delle acque del lago in funzione del tempo, dopo aver determinato i valori dei parametri.

A002 - ESAME DI MATURITÀ

Si assuma come modello descrittivo dell'andamento idrometrico del lago la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^4 - (x-2)^3 + \frac{7}{2}(x-2)^2 - 20, & 0 \le x < 3 \\ 2x - 24 + sen^2(\pi x), & 3 \le x \le 7 \\ 2\cos(2\pi x) - 12, & 7 < x \le 10 \end{cases}$$

b) Studiare f e tracciare un suo grafico, dopo aver verificato la continuità, studiato la derivabilità e determinato i punti di estremo relativo.

c) Giustificare la non applicabilità del teorema di Lagrange alla funzione f in $[0; 10]$.

Esistono, tuttavia, punti di ascissa $s \in]0; 10[$ tali che $f'(s) = \frac{f(10)-f(0)}{10}$?

Motivare la risposta.

d) Spiegare perché il teorema della Media Integrale è applicabile alla funzione f in $[0; 10]$. Calcolare, quindi, la variazione media Δh del livello delle acque del lago negli anni presi in esame.

Infine, considerando che la superficie del lago è di circa 57 km^2, utilizzare Δh per stimare, in litri, la differenza del volume di acqua tra l'inizio del 2016 e l'inizio del 2026.

PROBLEMA 2

Siano φ_a e γ, rispettivamente, i grafici rappresentativi delle funzioni:

$$f_a(x) = \frac{ax^2}{x-1}, \text{ con } a \neq 0 \qquad g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) Al variare del parametro a, studiare gli intervalli di monotonia della funzione f_a. Considerata la retta r, di equazione $y = k$ ($k \in \mathbb{R}$), determinare i valori di a e k in modo che r risulti tangente ai grafici φ_a e γ.

b) Siano A e B i punti stazionari, rispettivamente, dei grafici φ_a e γ, con $x_A \neq 0$ e $x_B > 0$. Determinare il valore di a in corrispondenza del quale la misura del segmento AB risulti minima.

D'ora in avanti, si ponga $a = \frac{1}{8}$.

c) Studiare le funzioni $f_{\frac{1}{8}}$ e g, esaminandone in particolare la continuità e la derivabilità, e tracciare i loro grafici $\varphi_{\frac{1}{8}}$ e γ in un medesimo sistema di riferimento. Utilizzare tali grafici per risolvere la disequazione $f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x)$.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ, dall'asse x e dalle rette parallele all'asse y passanti per i punti di flesso.

A002 - ESAME DI MATURITÀ

QUESITI

1. Cecilia mostra a Nicolò una variante del gioco "*Cover the spot*": disegna su un foglio un quadrato $ABCD$ di lato $\sqrt{2}$ dm e poi ritaglia tre cartoncini circolari di raggio $\frac{2}{3}$ dm. Lo scopo del gioco è quello di coprire, con i tre cerchi, la maggior parte possibile del quadrato. Cecilia posiziona inizialmente un cartoncino in modo che il centro sia sulla diagonale AC del quadrato e il bordo passi per A. Prima di posizionare il secondo cartoncino, afferma che ha già coperto più della metà del quadrato, mentre Nicolò dice che non è così.

   Chi ha ragione? Motivare la risposta.

2. Si considerino, nello spazio tridimensionale, i punti $A(2; -4;\ 3)$, $B(3; 5; -1)$, $C(-6; 1;\ 0)$, $D(-1;\ 4;\ 8)$.

   a) Verificare che A, B, C, D sono i vertici di un tetraedro regolare.

   b) Determinare l'equazione del piano tangente in A alla superficie sferica passante per i punti A, B, C, D.

3. Nel 1976, 50 anni fa, due scosse di terremoto, a maggio e a settembre, di magnitudo $M_1 = 6{,}5$ e $M_2 = 6{,}0$ della scala Richter, colpirono un vasto territorio a nord di Udine.

   La magnitudo M di un terremoto, secondo la scala Richter, è data da $M = log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right)$, dove A rappresenta il massimo delle ampiezze registrate da un sismografo e A_0 è un'ampiezza di riferimento.

   Si determini il rapporto $\frac{A_1}{A_2}$ tra le ampiezze prodotte dai due eventi sismici friulani.

   Dalla legge empirica di Gutenberg - Richter $\log_{10}\frac{E}{E_0} = 1{,}5M + 4{,}8$, dove E è l'energia liberata dal terremoto ed E_0 un'energia di riferimento, si determini la variazione percentuale dell'energia liberata tra il primo e il secondo terremoto.

4. Si consideri la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$ (con $x > 0$).

   Dimostrare che la funzione $F(x)$ è una funzione costante e calcolarne il valore.

5. Determinare i valori dei parametri reali h, k, con $h \neq 0$, in modo che la curva di equazione $y = h\ln(x^2 + k)^5$ abbia le rette $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$ come asintoti verticali e le rette tangenti nei punti A e B di intersezione con l'asse delle ascisse si incontrino in $C(0; -4)$.

6. Determinare l'espressione del polinomio $p(x)$ tale che il grafico della funzione $f(x) = \frac{p(x)}{2x+1}$ passi per il punto $P(1; 0)$ ed abbia per asintoto obliquo la retta di equazione $y = 3x - 2$.

7. Giuseppe, Lorenzo, Massimo e Vincenzo sono impegnati in una partita di scopone. All'inizio del gioco, a ciascun giocatore vengono casualmente distribuite 10 carte di un mazzo da 40 (diviso nei 4 semi: bastoni, coppe, denari e spade).

a) Determinare la probabilità che le prime 3 carte distribuite a Massimo siano tutte e 3 di coppe.

b) Determinare la probabilità che, tra le 10 carte distribuite a Lorenzo, siano presenti i 3 assi di bastoni, spade e denari.

8. Ad un torneo internazionale di pallavolo partecipano 16 squadre, che devono essere suddivise in 4 gironi (indicati con le lettere A, B, C, D) di 4 squadre ciascuno.

Le 16 squadre partecipanti sono inizialmente ripartite in 3 fasce, in base all'attuale ranking: 4 squadre di 1ª fascia, 4 di 2ª fascia e 8 squadre di 3ª fascia. Le 4 squadre di 1ª fascia vengono inserite, rispettivamente, nei gironi A, B, C, D, secondo l'ordine del ranking (senza alcun sorteggio). Le altre squadre di ogni girone vengono invece sorteggiate, in modo che in ciascuno di essi vi siano una squadra di 2ª fascia e due squadre di 3ª fascia.

Quante sono, complessivamente, le possibili composizioni dei gironi A, B, C, D?

«La matematica è il gioco più bello del mondo. Assorbe più degli scacchi, scommette più del poker, e dura più di Monopoli. È gratuita, e può essere giocata ovunque. Archimede lo ha fatto in una vasca da bagno»

Richard J. Trudeau, *Dots and lines,* Kent State University Press, 1976